Devoir sur Table 3

Durée : 4h

1. Les exercices sont indépendants. Ils peuvent être traités dans un ordre quelconque.
2. Tous les documents sur papier sont interdits.
3. Les calculatrices ne sont pas autorisées.
4. Le matériel de géométrie (règle, compas, équerre) est autorisé.
5. La notation des copies tiendra compte dans une large mesure de la qualité de la rédaction. Ceci implique que vous devez faire des raisonnements clairs, concis et complets, utiliser un langage mathématiques adapté et précis, être lisible et éviter les fautes d'orthographe et de grammaire.
6. Si, au cours du devoir, vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, vous le signalez sur votre copie et poursuivez sa composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez été amené à prendre.
7. Mettez en évidence vous résultats en les encadrant ou les soulignant.

Exercice 1

(*E3A PC 2021*)

1. Justifier que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge.
2. (a) Montrer que pour tout entier naturel N, $\displaystyle\sum_{n=0}^{N}\left(\int_0^1 x^{2n}(1-x)\mathrm{d}x\right)=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x}-\int_0^1\frac{x^{2(N+1)}}{1+x}\mathrm{d}x$.

   (b) Montrer que pour tout entier naturel N, $\displaystyle\left|\int_0^1\frac{x^{2(N+1)}}{1+x}\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{1}{2N+3}$.

   (c) En déduire la valeur de : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$.
3. (a) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $\varphi : x\longmapsto\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$.

   (b) Calculer $\varphi(1)$.
4. (a) Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_0^1\frac{1-x}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

   (b) Montrer que pour tout entier naturel N, $\displaystyle\sum_{n=0}^{N}(-1)^n x^{2n}=\frac{1-(-x^2)^{(N+1)}}{1+x^2}$.

   (c) Montrer que $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\int_0^1\frac{(-x^2)^{(N+1)}}{1+x^2}\mathrm{d}x=0$

   (d) En déduire que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(\int_0^1 x^{2n}(1-x)\mathrm{d}x\right)$ converge et que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(\int_0^1 x^{2n}(1-x)\mathrm{d}x\right)=\int_0^1\frac{1-x}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

   (e) Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}$ converge et déterminer sa somme.

Exercice 2

(adapté de EML 1998)

Dans cet exercice, $\mathbb{R}[X]$ désigne l'ensemble des polynômes à coefficients réels, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3 et $\mathbb{R}_n[X]$ désigne l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.

1. (a) Montrer que, pour tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ est convergente.
   (b) Pour tout entier naturel k, on note $I_k = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^k\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.
   Déterminer une relation entre I_k et I_{k+1}.
   (c) En déduire que, pour tout $k \geqslant 0$, $I_k = k!$.

   On considère l'application notée $\langle .,. \rangle$ de $\mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ définie par :
$$\langle P, Q\rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t}dt$$
2. (a) Montrer que $\langle .,. \rangle$ est un produit scalaire sur E_n.
   (b) Pour tout couple (i,j) d'entiers naturels inférieurs ou égaux à n, calculer $\left\langle X^i, X^j\right\rangle$.

   Dans la suite du problème, $\mathbb{R}_n[X]$ est muni de ce produit scalaire.
3. (a) On pose $Q_0 = 1$, $Q_1 = X-1$ et $Q_2 = X^2-4X+2$. Montrer que la famille (Q_0, Q_1, Q_2) est une base orthogonale de $\mathbb{R}_2[X]$.
   (b) Déterminer le projeté orthogonal de X^2 sur $\mathbb{R}_1[X]$
   (c) En déduire la valeur de $\displaystyle\inf_{(u,v)\in\mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} (t^2-ut-v)^2\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$

Exercice 3

(d'après EPITA 2017)

Dans tout ce problème, on désigne par α un nombre réel **positif**, et on se propose d'étudier la fonction f définie par l'intégrale suivante lorsque celle-ci est convergente :
$$f(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\mathrm{d}t.$$
On se propose d'approfondir dans la partie I l'absolue convergence, puis, dans la partie II, on calcule $f(1)$.

Partie I — Absolue convergence et convergence de l'intégrale $f(\alpha)$.

On va étudier la convergence de $f(\alpha)$ à l'aide des deux intégrales suivantes :
$$I(\alpha) = \int_0^{\pi} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\mathrm{d}t \quad ; \quad J(\alpha) = \int_\pi^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\mathrm{d}t.$$
1. (a) Donner un équivalent de la fonction $t \longmapsto \dfrac{\sin(t)}{t^\alpha}$ quand t tend vers 0.
   (b) En déduire pour quelles valeurs du réel α positif l'intégrale $I(\alpha)$ est convergente.
2. (a) Démontrer que l'intégrale $J(\alpha)$ est absolument convergente pour $\alpha > 1$.
   (b) Vérifier que la fonction $t \longmapsto |\sin(t)|$ est π-périodique, et en déduire, pour tout entier k, la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin(t)|\mathrm{d}t$.
   (c) Démontrer l'encadrement suivant pour tout réel $\alpha \geqslant 0$ et tout entier $k \geqslant 1$:
$$\frac{2}{(k+1)^\alpha\pi^\alpha} \leqslant \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin(t)|}{t^\alpha}\mathrm{d}t \leqslant \frac{2}{k^\alpha\pi^\alpha}.$$
   En déduire que, pour tout réel $\alpha \geqslant 0$ et tout entier $n \geqslant 2$,
$$\frac{2}{\pi^\alpha}\int_2^{n+1} \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t \leqslant \frac{2}{\pi^\alpha}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_\pi^{n\pi} \frac{|\sin(t)|}{t^\alpha}\mathrm{d}t \leqslant \frac{2}{\pi^\alpha}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^\alpha} \leqslant \frac{2}{\pi^\alpha}\left(1 + \int_1^{n-1}\frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t\right).$$

(d) Déterminer les valeurs du réel α telles que l'intégrale $J(\alpha)$ est absolument convergente.

3. (a) Étudier la convergence de l'intégrale $J(0)$.

(b) Démontrer la relation suivante pour tout réel $\alpha > 0$ et tout réel $x \geqslant \pi$:

$$\int_\pi^x \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\mathrm{d}t = -\frac{1}{\pi^\alpha} - \frac{\cos(x)}{x^\alpha} - \alpha \int_\pi^x \frac{\cos(t)}{t^{\alpha+1}}\mathrm{d}t.$$

(c) Calculer (en justifiant son existence) l'intégrale $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{1}{t^{\alpha+1}}\mathrm{d}t$ pour $\alpha > 0$.

En déduire l'absolue convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^{\alpha+1}}\mathrm{d}t$ pour $\alpha > 0$.

(d) En déduire la convergence de l'intégrale $J(\alpha)$ pour $\alpha > 0$.

4. Préciser les domaines de convergence et d'absolue convergence de l'intégrale $f(\alpha)$.
En déduire le domaine de définition de la fonction f introduite dans le préambule.

Partie II — Calcul de l'intégrale $f(1)$

1. (a) Justifier pour tout entier naturel n l'existence de l'intégrale suivante :

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)}\mathrm{d}t.$$

(b) Préciser la valeur de I_0 et prouver que l'on a $I_n - I_{n-1} = 0$ pour tout entier $n \geqslant 1$.
En déduire la valeur de l'intégrale I_n.

(c) On considère la fonction auxiliaire ψ définie pour $0 < t \leqslant \frac{\pi}{2}$ par $\psi(t) = \frac{1}{\sin(t)} - \frac{1}{t}$.
Quelle est la limite L de $\psi(t)$ lorsque t tend vers 0 ?
On posera désormais $\psi(0) = L$, de sorte que φ est ainsi définie et continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

(d) Démontrer l'égalité suivante pour tout entier naturel n :

$$\int_0^{\pi/2} \psi(t)\sin((2n+1)t)\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} - \int_0^{(2n+1)\pi/2} \frac{\sin(u)}{u}\mathrm{d}u.$$

2. On considère une fonction g de classe $\mathscr{C}^1$ du segment $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ dans $\mathbb{R}$.
À tout entier naturel n, on associe l'intégrale suivante :

$$u_n = \int_0^{\pi/2} g(t)\sin((2n+1)t)\mathrm{d}t.$$

(a) Démontrer que :

$$u_n = \frac{g(0)}{2n+1} + \frac{1}{2n+1}\int_0^{\pi/2} g'(t)\cos((2n+1)t)\mathrm{d}t.$$

(b) À l'aide d'une majoration convenable de cette dernière intégrale, en déduire la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$.

(c) Après avoir montré soigneusement que la fonction continue ψ introduite à la question 1.c) est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, en déduire la valeur de $f(1)$.

Exercice 4
(d'après Oral CCINP MP)

Dans une zone désertique, un animal erre entre trois points d'eau A, B et C.
À l'instant $t = 0$, il se trouve au point A.
Quand il a épuisé l'eau du point où il se trouve, il part avec équiprobabilité rejoindre l'un des deux autres points d'eau.
L'eau du point qu'il vient de quitter se régénère alors.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

On note A_n l'événement « l'animal est en A après son $n^{\text{ième}}$ trajet ».
On note B_n l'événement « l'animal est en B après son $n^{\text{ième}}$ trajet ».
On note C_n l'événement « l'animal est en C après son $n^{\text{ième}}$ trajet ».
On pose $\mathbb{P}(A_n) = a_n$, $\mathbb{P}(B_n) = b_n$ et $\mathbb{P}(C_n) = c_n$.

1. (a) Pour $n \in \mathbb{N}$, que vaut $a_n + b_n + c_n$?
   (b) Exprimer, en le justifiant, a_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.
   (c) Exprimer, de même, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.
2. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.
   (a) Justifier que la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ est inversible et déterminer P^{-1}
   (b) Calculer $P^{-1}AP$
   (c) En déduire une expression de A^n pour $n \in \mathbb{N}$.
3. En déduire une expression de a_n, b_n et c_n en fonction n.